

ENCYKLOPÄDIE
DER
MATHEMATISCHEN
WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN

DRITTER BAND IN DREI TEILEN

GEOMETRIE

REDIGIERT VON

W. FR. MEYER UND **H. MOHRMANN**
IN KÖNIGSBERG IN BASEL

ZWEITER TEIL

ERSTE HÄLFTE



LEIPZIG
VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER
1903 — 1915



ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN

1912 195 7

Inhaltsverzeichnis zu Band III, 2. Teil, 1. Hälfte.

C. Algebraische Geometrie.

1. Kegelschnitte und Kegelschnittssysteme. Von FRIEDRICH DINGELDEY in Darmstadt.

I. Der Kegelschnitt als Einzelgebilde.

A. Elementare Erzeugungsweisen und Eigenschaften.

	Seite
1. Schnitt von Kegel und Ebene	6
2. Konstante Summe oder Differenz der Abstände von zwei festen Punkten	7
3. Diskussion der Gleichungen für Ellipse und Hyperbel	9
4. Definition der Kegelschnitte durch Brennpunkt und Leitlinie. Diskussion der Parabel	12
5. Sätze von Dupin und Dandelin	12

B. Allgemeine Theorie der Kegelschnitte.

6. Erzeugnis projektiver Strahlenbüschel oder Punktreihen	13
7. Gleichung der C_2 in Punktkoordinaten	16
8. Schnittpunkte einer Geraden mit der C_2 . Pol und Polare	17
9. Gleichung der Kurve 2. Klasse C^2	19
10. Weitere Sätze über Pol und Polare. Polarsystem. Poldreieck	19
11. Konjugierte Durchmesser	21
12. Kriterien der C_2 und C^2	22
13. Axen des Kegelschnitts. Imaginäres Kreispunktpaar	24
14. Transformation der C_2 auf die Axen	25
15. Besondere Fälle der Axentransformation	27
16. Direktorkreis. Ähnliche Kegelschnitte	29
17. Weitere Sätze über konjugierte Durchmesser. Umschriebene oder eingeschriebene Parallelogramme	30
18. Satz von Pascal	32
19. Satz von Brianchon Reziproke Polaren	35
20. Nähere Untersuchung der Konfiguration des Pascal'schen Sechsecks	36
21. Gewisse Reziprozitäten in der Pascal'schen Konfiguration	38
22. Weitere Untersuchungen über das Pascal'sche Sechseck	39
23. Metrische Relationen bei eingeschriebenen oder umschriebenen Polygonen	41
24. Veränderliche eingeschriebene Polygone	42
25. Konstruktion gewisser eingeschriebener Polygone	44
26. Schliessungssatz von Poncelet	46
27. Zusammenhang des Schliessungsproblems mit den elliptischen Funktionen	48
28. Weitere Arbeiten zum Schliessungstheorem	51
29. Alte und neuere Definitionen der Brennpunkte	52
30. Weitere Brennpunkteigenschaften	56
31. Gleichungen zur Bestimmung der Brennpunkte und Direktrizen	58

C. Normale und Krümmungskreis.

32. Normale eines Kegelschnittpunktes	60
33. Die von irgend einem Punkt P nach einem Kegelschnitt zu ziehenden Normalen	62

	Seite
34. Weitere Untersuchungen zum Normalenproblem	65
35. Besondere einfache Fälle des Normalenproblems	68
36. Krümmungskreis	69
37. Satz von Steiner über Krümmungskreise	75
38. Beziehungen zwischen Krümmungsradien verschiedener Punkte	76
39. Krümmungsradien sich berührender Kegelschnitte	77
40. Evolute	77

D. Quadratur und Rektifikation.

41. Quadratur	79
42. Rektifikation. Sätze von Fagnano, Landen, Euler u. A.	80
43. Untersuchungen von Legendre und Talbot	83
44. Reihentwickelungen.	84

E. Apparate zum Zeichnen der Kegelschnitte.

45. Apparate zum Zeichnen der Kegelschnitte	85
-------------------------------------------------------	----

II. Kegelschnittsysteme.

A. Kegelschnittbüschel.

46. Schnittpunkte und gemeinsames Poldreieck zweier Kegelschnitte	88
47. Desargues-Sturmscher Satz	91
48. v. Staudt'sche Kegelschnitte	92
49. Polkegelschnitt einer Geraden. Mittelpunktskegelschnitt.	93
50. Die Frage nach dem im Büschel enthaltenen Kurvenarten	94
51. Büschel mit einem oder mit unendlich vielen Kreisen	96
52. Ähnliche Kegelschnitte des Büschels und solche von kleinstem oder größtem Axenprodukt.	98
53. Doppelverhältnis der Grundpunkte.	99
54. Ort für die Brennpunkte der Kegelschnitte eines Büschels	100
55. Einige geometrische Örter.	101

B. Kegelschnittscharen.

56. Gemeinsames Poldreieck	103
57. Mittelpunktsgerade. Polarkegelschnitt	104
58. Art der in einer Schar enthaltenen Kurven	105
59. Ähnliche Kegelschnitte der Schar und solche von grösstem Axenprodukt	105
60. Direktorkreise der Scharkurven	107
61. Der Ort für die Brennpunkte der Kegelschnitte einer Schar	108
62. Einige geometrische Örter.	109
63. Schar der einem Dreieck eingeschriebenen Parabeln.	110
64. Scharen von Kegelschnitten mit einem gemeinsamen Brennpunkt	112
65. Konfokale Kegelschnitte.	113
66. Elliptische Koordinaten. Satz von Ivory	116
67. Sätze von Chasles	118
68. Polarkegelschnitt der konfokalen Schar.	119
69. Weitere Sätze von Chasles, vergleichbare Bögen	120
70. Büschelschar sich doppelt berührender Kegelschnitte	122

C. Gemischte Kegelschnittsysteme.

71. Das System $S(3p, 1g)$	125
72. Das System $S(3g, 1p)$	126
73. Das sich selbst duale System $S(2p, 2g)$	127
74. Das System der einen Kegelschnitt doppelt berührenden Kreise	129
75. Verschiedene andere Kegelschnittsysteme	130
76. Zahl der Kegelschnitte bei gegebenen Bedingungen, Charakteristiken- theorie	133

D. Kegelschnittnetze.

77. Kegelschnittnetz und Hesse'sche Kurve des Netzes	135
78. Cayleysche Kurve des Netzes	137
79. System konischer Polaren einer C_3	138
80. Netze, deren Hessiane oder Cayleysche Form verschwindet	139

E. Kegelschnittgewebe.

81. Kegelschnittgewebe; seine Hesse'sche und Cayley'sche Kurve	139
--------------------------------------------------------------------------	-----

F. Kegelschnitte und Kegelschnittssysteme in konjugierter Lage.

82. Kegelschnitte in konjugierter Lage	141
83. Weitere Untersuchungen über konjugierte Kegelschnitte	144
84. Kegelschnittssysteme in konjugierter Lage	145
85. Besondere Fälle	150

G. Invarianten von zwei und drei Kegelschnitten.

86. Simultane Invarianten zweier C_2	152
87. Beziehungen zwischen einzelnen Formen	154
88. Taktinvariante. Kombinate $\psi(x, x)$	155
89. Quadratische ternäre und biquadratische binäre Formen	157
90. Invarianten dreier Kegelschnitte	158

(Abgeschlossen im Januar 1903.)

2. Flächen 2. Ordnung und ihre Systeme und Durchdringungskurven. Von O. STAUDE in Rostock.

I. Die Klassifikation der Flächen 2. Ordnung.

1. Begriff der Fläche 2. Ordnung und das Problem der Klassifikation	167
2. Die Determinante der Fläche 2. Ordnung	168
3. Einteilung nach dem Range	168
4. Identität der Flächen 2. Ordnung und 2. Klasse	169
5. Einteilung nach Spezies	170
6. Einteilung nach der Schnittlinie mit der unendlich fernen Ebene	171
7. Die Arten der Flächen 2. Ordnung	171
8. Mittelpunkt, konjugierte Durchmesser und Tangenten	172
9. Das Hauptachsenproblem	173
10. Kanonische Gleichungen und Gestalt der Flächen 2. Ordnung	176
11. Unterarten der Flächen 2. Ordnung	176

II. Fläche 2. Ordnung und Ebene.

12. Analytische Darstellung ebener Schnitte	178
13. Projektive Einteilung der Schnittkurven	179
14. Metrische Einteilung der Schnittkurven	179
15. Das Hauptachsenproblem der ebenen Schnitte	180
16. Kreisschnitte und Kreispunkte	181
17. Gleichseitig hyperbolische Schnitte	182
18. Brennpunkte ebener Schnitte	182
19. Hauptkrümmungsradien der Fläche 2. Ordnung	182
20. Verwandtschaft mehrerer ebener Schnitte einer Fläche 2. Ordnung	183
21. Berührungsprobleme für ebene Schnitte	183

III. Fläche 2. Ordnung und gerade Linie.

22. Schnittpunkte mit einer Geraden	184
23. Doppelverhältnisse auf der Verbindungslinie zweier Punkte	185
24. Der Berührungskegel	185

	Seite
25. Besondere Formen des Berührungskegels	186
26. Der Tangentenkomplex der Fläche 2. Ordnung	186
27. Polygone aus Sehnen und Tangenten	187
28. Verallgemeinerung des Potenzbegriffs und der Newton'schen Sätze	188

IV. Die Erzeugenden der Fläche 2. Ordnung.

29. Begriff der Erzeugenden	188
30. Die beiden Regelscharen	189
31. Analytische Darstellung der Erzeugenden	189
32. Leitstrahlen einer Regelschar	190
33. Hyperboloidische Lage von 4 Geraden	190
34. Komplexe, denen die Erzeugenden angehören	191
35. Die Erzeugenden als Träger projektiver Gebilde	192
36. Polygone aus Erzeugenden	192
37. Striktionslinien der Flächen 2. Ordnung	193

V. Die Polarentheorie der Flächen 2. Ordnung.

38. Begriff und Einteilung der Polarsysteme	193
39. Das eigentliche räumliche Polarsystem	194
40. Singuläre räumliche Polarsysteme	195
41. Poltetraeder	196
42. Polfünfecke, Polsechsecke u. s. w.	197
43. Der Achsenkomplex der Fläche 2. Ordnung	198
44. Die Normalenkongruenz der Fläche 2. Ordnung	198
45. Krümmungsmittelpunktsfläche, Parallelfäche, Fusspunktfäche	199

VI. Erzeugungen und Konstruktionen.

46. Erzeugung durch projektive Gebilde 1. Stufe	200
47. Erzeugung durch projektive Gebilde 2. Stufe	201
48. Erzeugung durch projektive Gebilde 3. Stufe	201
49. Konstruktion der Fläche 2. Ordnung aus neun Punkten	201
50. Fläche durch einen Kegelschnitt und vier Punkte	203
51. Spezielle Erzeugungen	203
52. Mehrdeutige Bestimmungen	203

VII. Die Fokaleigenschaften der Flächen 2. Ordnung.

53. Das konfokale System	204
54. Die Fokalkegelschnitte als Grenzflächen	205
55. Die Fokalkegelschnitte als Ort der Spitzen von Rotationskegeln	205
56. Fokalkegelschnitte und Fokalachsen	205
57. Die Fokalkegelschnitte als Ordnungskurven	206
58. Die Fokalpunkte als Punktkugeln	206
59. Fokaleigenschaften spezieller Flächen	207
60. Fokaleigenschaften konjugierter Fokalkegelschnitte	207
61. Amiot's und Mac Cullagh's Fokaleigenschaften	207
62. Ivory's Theorem und Jacobi's Fokaleigenschaften	208
63. Staudé's Fokaleigenschaften	209
64. Elliptische und parabolische Koordinaten	210
65. Gemeinsame Tangenten zweier konfokaler Flächen	211
66. Fokaleigenschaften der Krümmungslinien	211

VIII. Büschel von Flächen 2. Ordnung.

67. Begriff des Büschels	212
68. Die Determinante des Büschels	212
69. Flächenbüschel und Ebene	213
70. Flächenbüschel und Gerade	214
71. Polarentheorie im Flächenbüschel	215
72. Hauptpunkte und Hauptebenen	215

	Seite
73. Die Arten des Büschels	216
74. Realitätsverhältnisse	218
75. Singuläre Büschel	218
76. Flächen mit gemeinsamem Kegelschnitt	218
77. Flächen, die sich längs eines Kegelschnittes berühren	220
78. Besondere metrische Natur der Grundflächen	221
79. Fläche 2. Ordnung und linearer Komplex	222

IX. Transformation und Abbildung.

80. Kollinearverwandtschaft zweier Flächen 2. Ordnung	223
81. Kollinearverwandtschaft einer Fläche 2. Ordnung mit sich selbst	223
82. Analytische Darstellung der Transformation der Fläche 2. Ordnung in sich	224
83. Die Fläche 2. Ordnung bei der allgemeinen Korrelation des Raumes	225
84. Die Fläche 2. Ordnung bei der Polarreziprozität	225
85. Polarverwandtschaft einer Fläche 2. Ordnung mit sich selbst	226
86. Polarverwandtschaft zweier gegebener Flächen	226
87. Quadratische Transformationen einer Fläche 2. Ordnung	227
88. Abbildung der Fläche 2. Ordnung auf die Ebene	227

X. Die Raumkurven 3. Ordnung.

89. Allgemeine Übersicht über die grundlegenden Arbeiten	228
90. Bestandteile, Ordnung, Rang und Klasse	229
91. Schmiegungstetraeder	229
92. Die Kongruenz der Sehnen	230
93. Der Komplex der Transversalen	230
94. Flächen 2. Ordnung durch die φ_3	231
95. Polarentheorie der φ_3	231
96. Die Möbius'schen Tetraeder	232
97. Konjugierte Punkte	232
98. Projektive Erzeugung	232
99. Bestimmungsstücke und Konstruktionen	233
100. Kubische Raumkurve im tetraedralen Komplex	233
101. Einteilung der φ_3 in Arten	234
102. Durchmesser der φ_3	235
103. Krümmungsverhältnisse	235
104. Metrische und Fokaleigenschaften	235
105. Metrische Unterarten der φ_3	235
106. Transformation der φ_3 in sich	236
107. Binäre Formen auf der φ_3	236
108. Invariante Beziehung zweier φ_3 oder einer φ_3 und einer F_2	236
109. Büschel und Bündel von φ_3	237

XI. Die Raumkurven 4. Ordnung 1. Spezies.

110. Allgemeine Übersicht	237
111. Begriff und Arten	238
112. Die Singularitätenzahlen	239
113. Parameterdarstellung der Raumkurven 4. Ordnung	239
114. Die Sehnenkongruenz	240
115. Die Tangenten der φ_4	241
116. Die Tangentialebenen der φ_4	241
117. Die Schmiegungebenen der φ_4	241
118. Der Transversalenkomplex	242
119. Bestimmungsstücke und Konstruktionen	242
120. Büschel von φ_4 auf einer Fläche 2. Ordnung	243
121. Punktquadrupel auf φ_4	243
122. Punkttripel auf φ_4	243
123. Schliessungssätze	243
124. Transformation der φ_4	244
125. Stereographische Projektion	244

	Seite
126. Realitäts- und Gestaltsverhältnisse	245
127. Besondere Raumkurven 4. Ordnung	245

XII. Das Flächenbündel 2. Ordnung.

128. Begriff des Flächenbündels 2. Ordnung	246
129. Bündel und Ebene. Bündel und Gerade	247
130. Polarentheorie im Bündel	247
131. Die Kernkurve des Bündels	247
132. Das System der acht assoziierten Punkte	248
133. Spezielle Bündel	249

XIII. Das Gebüsch von Flächen 2. Ordnung.

134. Begriff des Gebüsches	250
135. Polarentheorie im Gebüsch	250
136. Projektive Beziehung auf den Ebenenraum	251
137. Die Kernfläche des Gebüsches	251
138. Die Hauptstrahlen im Gebüsch	251
139. Gebüsch und Steinersche Fläche	252
140. Gebüsch mit einem oder mehreren Grundpunkten	252
141. Gebüsch mit sechs Grundpunkten	252
142. Das Gebüsch der ersten Polaren einer F_5	253
143. Gebüsch mit einer oder zwei Basisgeraden	253
144. Gebüsch mit Basiskegelschnitt	254
145. Gebüsch mit Polartetraeder	254

XIV. Systeme und Gewebe 4. bis 9. Stufe.

146. Begriff des Systems und Gewebes	254
147. Lineare Systeme und Gewebe	255
148. Quadratische Systeme	256
149. Die Kugel als Raumelement	256

(Abgeschlossen im März 1904.)

3. Abzählende Methoden. Von H. G. ZEUTHEN† (in Kopenhagen).

I. Allgemeines.

1. Zweck	259
2. Allgemeine Grundbegriffe; Bézout's Theoreme	260
3. Die Begriffe „allgemein“ und „speziell“; Plücker's, Cayley's, Salmon's Formeln usw.	261
4. Synthetische Benutzung schon gefundener Resultate	264

II. Das Prinzip der Erhaltung der Anzahl (Kontinuitätsprinzip).

5. Poncelet's Kontinuitätsprinzip	265
6. Gebrauch des Kontinuitätsprinzips nach Poncelet	267
7. Vollständigere Wiederaufnahme des Kontinuitätsprinzips	269
8. Prinzip der Erhaltung der Anzahl	270
9. Induktive Erweiterungen; Cayley's funktionale Methode; weitere Kritik	271
10. Aufgaben mit unendlich vielen Auflösungen	275
11. Aufgaben mit 0 Auflösungen	277

III. Das Korrespondenzprinzip.

12. Vorbereitung des Korrespondenzprinzips	278
13. Das Korrespondenzprinzip und seine ersten Anwendungen	279
14. Bestimmung der Anzahl zusammenfallender Auflösungen; weitere Anwendungen	280

	Seite
15. Verwandte Methoden	282
16. Korrespondenz in der Ebene und im Raume von drei oder mehreren Dimensionen	283
17. Korrespondenzen auf einer Kurve	284

IV. Gebrauch von den Geschlechtssätzen.

18. Der einfache und erweiterte Geschlechtssatz für algebraische Kurven .	287
19. Das Flächengeschlecht und ähnliche Zahlen	289

V. Successive Einführung der Bedingungen; symbolischer Kalkül.

20. Systeme von Kurven; de Jonquières' Index	290
21. Chasles' zwei Charakteristiken	291
22. Charakteristiken von Kurven- und Flächensystemen	292
23. Symbolische Multiplikation	293
24. Schubert's Inzidenzformeln	294
25. Schubert's Koinzidenzformeln; weitere Formelbildungen	295
26. Fundamentale Anzahlen, Inzidenz- und Koinzidenzformeln im n -dimensionalen Raume	296

VI. Berechnung der Charakteristiken eines Systems durch Ausartungen.

27. Systeme von Kegelschnitten	298
28. Systeme von Flächen und Räumen 2. Ordnung	299
29. Kurvensysteme höherer Ordnung	300
30. Paare entsprechender Figuren	301

VII. Das Charakteristikenproblem.

31. Systeme 2. Ordnung	303
32. Andere Charakteristikensätze	305

VIII. Anhang.

33. Erneuerte Fühlung mit der algebraischen Behandlung	306
34. Anwendungen auf transzendente Aufgaben	311

(Abgeschlossen im Dezember 1905)

4. Allgemeine Theorie der höheren ebenen algebraischen Kurven. Von LUIGI BERZOLARI in Pavia.

I. Allgemeines.

1. Algebraische ebene Kurven; deren reelle Darstellung	316
2. Definitionen und elementare Eigenschaften	320
3. Fortsetzung; lineare Kurvensysteme	325
4. Das Geschlecht; der Riemann'sche Satz über dessen Erhaltung bei birationalen Transformationen; Zeuthen's Erweiterung	329
5. Polareigenschaften	332
6. Die Jacobi'sche Kurve dreier Kurven	337
7. Kovariante Kurven einer Grundkurve: Hesse'sche, Steiner'sche, Cayley'sche Kurve; Bitangentalkurve	339
8. Die Plücker'schen Formeln	342
9. Algebraische ∞^1 Kurvensysteme; Charakteristikentheorie	345
10. Kurvenerzeugungen	353
11. Rein geometrische Untersuchungen	358

II. Die singulären Punkte.

	Seite
12. Auflösung der singulären Punkte durch birationale Transformationen	362
13. Zweige (vollständige und partielle) als Punktörter und als Geradenörter; Reihenentwickelungen	365
14. Anwendungen; Multiplizität des Schnittes	370
15. Das Geschlecht und die adjungierten Kurven bei beliebig singulären Kurven; Erweiterung der Plücker'schen Formeln	373
16. Charakteristische Zahlen eines Zweiges	377
17. Formeln von Halphen, Smith, Zeuthen	379
18. Plücker'sche Äquivalente; Erzeugung der Singularität durch Grenzübergang	381

III. Realitätsfragen und metrische Eigenschaften.

19. Reelle Zweige und Züge einer ebenen algebraischen Kurve	383
20. Klein-Riemann'sche Flächen	389
21. Asymptoten, Durchmesser, Mittelpunkt, Brennpunkte	392
22. Evolute und andere abgeleitete Kurven	401

IV. Die Geometrie auf einer algebraischen Kurve.

23. Fundamentalsatz von Noether	405
24. Die linearen Scharen von Punktgruppen	406
25. Der Restsatz; Voll- und Teilscharen	411
26. Anwendung elementarer Operationen auf lineare Scharen. Scharen, welche die Summen oder Vielfache anderer Scharen sind; Residualscharen	412
27. Spezielle und nicht-speziale Scharen	414
28. Das Problem der Spezialgruppen und ausgezeichneten Gruppen	419
29. Normalkurven	422
30. Die Moduln einer Klasse von algebraischen Kurven	423
31. Erweiterungen. Die Systeme von Schnittpunkten einer algebraischen Kurve mit nicht-adjungierten Kurven	425
32. Reduzible Grundkurven	427
33. Anwendungen. Schnittpunktsätze	428
34. Weitere abzählende Fragen über lineare Scharen; Berührungsaufgaben	432

V. Die linearen Kurvensysteme.

35. Durch die Basispunkte bestimmte lineare Kurvensysteme	438
36. Eigenschaften der linearen, vollständigen, irreduziblen Kurvensysteme, die bei birationalen ebenen Transformationen ungeändert bleiben	442
37. Klassifikation der linearen Kurvensysteme. Reduktion auf Minimalordnung durch birationale Transformationen. Lineare Kurvensysteme, welche die Abbildung von Flächen verschiedener Räume geben. Kantor's Äquivalenztheorie	446
38. Spezielle Untersuchungen über lineare ∞^1 , ∞^2 , ∞^3 Kurvensysteme	450
Zusätze	454

(Abgeschlossen im Juni 1906.)

5. Spezielle ebene algebraische Kurven. Von G. KOHN † (in Wien) und G. LORIA in Genua.

a. Ebene Kurven dritter und vierter Ordnung. Von G. KOHN † (in Wien).

A. Ebene Kurven dritter Ordnung.**I. Einteilung und gestaltliche Verhältnisse.**

1. Newtons Ergebnisse	461
2. Einteilung nach Klasse und Geschlecht	462
3. Die Einteilung nach der Gestalt I	464

	Seite
4. Das Doppelverhältnis	464
5. Die beiden Grundformen der nichtsingulären Kurve	465
6. Die Einteilung nach der Gestalt II.	466

II. Polarentheorie.

7. Die beiden Polaren eines Punktes	467
8. Die gemischte Polare zweier Punkte und die Polare eines Kegelschnittes	468
9. Hessesche und Cayleysche Kurve.	469
10. Das Netz der Polarkegelschnitte und die Scharschar der apolaren Kegelschnitte	471
11. Polokoniken und Autopolokoniken	471
12. Konjugierte Dreiecke und Vierecke.	472
13. Apolarität, Polarseite	473
14. Satellitkegelschnitt, Satellitgerade	474

III. Wendepunktfigur.

15. Die Wendepunkte	475
16. Die vier Wendedreiseite.	476
17. Die harmonischen Polaren der Wendepunkte	477
18. Die Hessesche Kollineationsgruppe	478
19. Die Wendetangenten	479

IV. Bestimmungsarten für die Kurven dritter Ordnung.

20. Gleichungsformeln	479
21. Parameterdarstellung	481
22. Die Kurve dritter Ordnung als Hessesche Kurve.	482
23. Die drei Systeme von korrespondierenden Punkten	482
24. Die drei Systeme von Berührungskegelschnitten	483
25. Eine Gruppe von Erzeugungsarten	484
26. Konstruktion aus neun Punkten, die Erzeugung durch zwei projektive Büschel	485
27. Weitere Erzeugungsarten	486

V. Ternäre kubische Formen.

28. Grundlegung der Theorie	488
29. Das vollständige Formensystem	489
30. Die wichtigsten Komitanten und ihre geometrische Deutung	490
31. Kanonisierung, irrationale Kovarianten	491

VI. Systeme von Kurven dritter Ordnung.

32. Das Kurvenbüschel dritter Ordnung	492
33. Das syzygetische Büschel. Die äquianharmonischen und die harmonischen Kurven dritter Ordnung	493
34. Das Kurvennetz dritter Ordnung und weitere Systeme	495

VII. Die Geometrie auf der Kurve.

35. Vollständige Schnittpunktsysteme. Der Restsatz	496
36. Grundlagen für die Verwertung der Parameterverteilung	497
37. Die eindeutigen algebraischen Transformationen der elliptischen Kurve in sich	498
38. Die Systeme von n -fachen Punkten der Vollscharen n^{ter} Ordnung.	500
39. Schließungsprobleme, eingeschriebene Polygone und Konfigurationen	501

VIII. Projektive Theorie der rationalen Kurven dritter Ordnung.

40. Kanonische Gleichungsform und Singularitäten	503
41. Polarentheorie, Hessesche und Cayleysche Kurve	504
42. Erzeugungsarten und konstruktive Behandlung	504

	Seite
43. Fortsetzung. Oskulanten	506
44. Die Kurve als rationaler Träger	507
45. Die Kurve mit Spitze	508

IX. Metrik und metrisch ausgezeichnete Kurven dritter Ordnung.

46. Metrische Eigenschaften der allgemeinen Kurve dritter Ordnung . . .	509
47. Zirkularkurven dritter Ordnung vom Geschlecht 1.	510
48. Die Fokalkurve.	512
49. Rationale Zirkularkurven dritter Ordnung, Zissoide, Strophoide, Slusische Konchoide, Maclaurins Trisectrix	513
50. Andere metrisch ausgezeichnete Kurven dritter Ordnung	516

B. Ebene Kurven vierter Ordnung.

I. Einteilung und gestaltliche Verhältnisse.

51. Die projektive Einteilung	517
52. Die Einteilung nach der Gestalt für die nichtsinguläre C_4	518
53. Die Gestalten der singulären Kurven	521

II. Polaren- und Formentheorie.

54. Die Polaren eines Punktes. Kovariante Kurven, welche der Polarentheorie entstammen	522
55. Die Polare einer Kurve 2. Klasse, die Antipolare einer Geraden, die Kurve 4. Klasse Ω	523
56. Die Kontravarianten P und Q und die Wendetangenten	524
57. Polarfiguren	525
58. Das Formensystem	526

III. Die allgemeine Kurve vierter Ordnung als Hüllkurve von Kegelschnittsystemen.

95. Die Steinersche Gruppe von sechs Doppeltangentenpaaren	527
60. Die C_4 als Einhüllende eines eindimensionalen quadratischen Kegelschnittsystems	528
61. Entstehungsarten eines eindimensionalen quadratischen Kegelschnittsystems	529
62. Beziehungen zwischen den 63 Systemen von Berührungskegelschnitten	530
63. Die 315 Kegelschnitte, welche je 8 Berührungspunkte von vier Doppeltangenten ausschneiden	531

IV. Weitere Entstehungsarten.

64. Projektive Erzeugung. Konstruktionen	532
65. Hesses Darstellung der C_4	533
66. Hesses Algorithmus für die Doppeltangenten	534
67. Die 64 Systeme von Berührungskurven dritter Ordnung	534
68. Die Aronholdsche Erzeugungsweise	535
69. Zusammenhang zwischen den Entstehungsarten von Hesse und Aronhold.	536
70. Die Auffassung von Clebsch und weitere Erzeugungsarten	537
71. Geisers Erzeugungsweise	538
72. Weitere Erzeugungen. Abbildungen	538

V. Gruppierungsverhältnisse der Doppeltangenten und der Systeme von Berührungskurven.

73. Gruppen von Doppeltangenten.	539
74. Berührungskurven. Charakteristikentheorie	540
75. Realitätstragen	542

VI. Spezielle nichtsinguläre Kurven vierter Ordnung.

76. Die Kurven mit Polardreieit und die Kurven mit Polarvierseit	Seite 542
77. Die Kurven von Clebsch, Lüroth und Humbert	543
78. Kurven mit Kollineationen in sich, insbesondere die Kleinsche Kurve	544

VII. Die Kurven vom Geschlecht Zwei.

79. Modifikationen der allgemeinen Theorie	545
80. Der Kegelschnitt von Bertini	547
81. Spezielle Kurven vom Geschlecht Zwei	548

VIII. Die Kurven vom Geschlecht Eins. Bizirkularkurven vierter Ordnung.

82. Modifikationen der allgemeinen Theorie	549
83. Erzeugungsweisen	549
84. Die bizirkularen Kurven vierter Ordnung als Hüllkurven von Kreis- systemen	551
85. Fortsetzung. Anallagmatien. Fokaleigenschaften	552
86. Die reinen Berührungskegelschnitte einer Bizirkularkurve vierter Ord- nung	553
87. Die bizirkularen Kurven vierter Ordnung vom Standpunkt der Inversions- geometrie	554
88. Symmetrische Bizirkularkurven vierter Ordnung	556
89. Die Cassinischen Kurven	556
90. Cartesische Kurven	557

IX. Die Kurven vom Geschlecht Null.

91. Ausgezeichnete Punkte und Tangenten. Kovariante Kurven	559
92. Erzeugungsarten	560
93. Die Kurve als rationaler Träger	561
94. Kurven vierter Ordnung mit drei Inflexionsknoten. Lemniskate von Bernoulli	563
95. Die rationalen Bizirkularkurven vierter Ordnung	564
96. Die Pascalsche Schnecke und die Kardioiden	565
97. Die Steinersche Hypozykloide	567
98. Rationale Kurven vierter Ordnung mit höheren Singularitäten	569

(Abgeschlossen im Mai 1908.)

b. Spezielle ebene algebraische Kurven von höherer als der vierten Ordnung. Von GINO LORIA in Genua.

Einleitung	573
----------------------	-----

A. Kurven, die vom Standpunkt der Ordnung aus speziell sind.

I. Kurven 5. Ordnung.

1. Allgemeines	573
2. Die rationalen Kurven 5. Ordnung im allgemeinen	575
3. Aufzählung einiger wichtiger spezieller rationaler Kurven 5. Ordnung	577
4. Elliptische Kurven 5. Ordnung	579
5. Kurven 5. Ordnung mit 4 Doppelpunkten	580
Kurven der Ordnung 5 und des Geschlechts 3	581

II. Kurven 6. Ordnung.

6. Allgemeines	582
7. Kurven 6. Ordnung, die mit dem Normalenproblem der Kegelschnitte zusammenhängen	586