ABELSCHE FUNKTIONEN UND ALGEBRAISCHE GEOMETRIE

VON

FABIO CONFORTO †

AUS DEM NACHLASS BEARBEITET
UND HERAUSGEGEBEN

VON

W. GRÖBNER · A. ANDREOTTI UND M. ROSATI

MIT 8 TEXTABBILDUNGEN

SPRINGER-VERLAG
BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
1956

DIE GRUNDLEHREN DER

MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN

IN EINZELDARSTELLUNGEN MIT BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG DER ANWENDUNGSGEBIETE

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL · E. HOPF · H. HOPF · F. K. SCHMIDT
B. L. VAN DER WAERDEN

BAND LXXXIV

ABELSCHE FUNKTIONEN UND ALGEBRAISCHE GEOMETRIE

VON

FABIO CONFORTO †

SPRINGER-VERLAG
BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
1956

ALLE RECHTE, INSBESONDERE DAS DER ÜBERSETZUNG
IN FREMDE SPRACHEN, VORBEHALTEN

OHNE AUSDRÜCKLICHE GENEHMIGUNG DES VERLAGES IST ES AUCH NICHT
GESTATTET, DIESES BUCH ODER TEILE DARAUS AUF PHOTOMECHANISCHEM
WEGE (PHOTOKOPIE, MIKROKOPIE) ZU VERVIELFÄLTIGEN

© BY SPRINGER-VERLAG OHG.
BERLIN . GÖTTINGEN . HEIDELBERG 1956
PRINTED IN GERMANY

BRÜHLSCHE UNIVERSITÄTSDRUCKEREI GIESSEN

Vorwort

Schon vor fünf Jahren hatte ich mit meinem inzwischen verstorbenen Freunde FABIO CONFORTO (1909—1954) vereinbart, eine deutsche Bearbeitung seiner Vorlesungen über ABELsche Funktionen*), die er im Studienjahr 1940/41 in Rom gehalten hat, herauszugeben. Da aber eine gründliche Überarbeitung des aus dem Jahre 1942 stammenden Textes notwendig erschien, die CONFORTO selbst besorgen wollte**), wurde die Verwirklichung dieses Planes zunächst noch hinausgeschoben. Aber bald nach dem Abschluß des Vertrages mit dem Verleger wurde CONFORTO von einer unerbittlichen Krankheit befallen, die ihn innerhalb Jahresfrist zwang, die Feder für immer aus der Hand zu legen, noch bevor er mit diesem Werk hatte beginnen können. So blieb mir dessen Gestaltung und Vollendung als Vermächtnis zurück, das ich im Sinne und Geiste meines verstorbenen Freundes bestens durchzuführen bestrebt war, um so mehr, als ich damit hoffen durfte, eine wirkliche Lücke auszufüllen und den heute Lebenden eines der reizvollsten Gebiete der klassischen Mathematik näherzubringen, das seit dem Aussterben der alten Mathematikergeneration, zu der auch noch mein verehrter Lehrer W. WIRTINGER gehört hatte, beinahe vergessen worden ist.

Dabei war ich glücklich, in A. ANDREOTTI und M. ROSATI zwei ausgezeichnete Mitarbeiter zu finden, die als ehemalige Schüler CONFORTOs sehr gut mit seinen Absichten und Plänen vertraut waren und so entscheidend zum Gelingen des Werkes beigetragen haben. Aus den letzten Jahren lag auch noch eine vervielfältigte Vorlesung***) CONFORTOs vor, deren erstes Kapitel in das vorliegende Buch hineinverarbeitet werden konnte.

Wenn es auch notwendig war, den Text aus dem Jahre 1942 sehr gründlich umzuarbeiten, so war doch unser vorzüglichstes Bestreben

---

*) Es existiert eine nur mehr in wenigen Exemplaren vorhandene photomechanische Vervielfältigung dieser Vorlesungen:

CONFORTO, FABIO: Funzioni Abeliane e Matrici di RIEMANN. 304 S. Rom: Libreria dell'Università 1942.

**) Daß CONFORTO diese Absicht hatte, geht auch aus der folgenden Stelle seines Briefes an F. K. SCHMIDT vom 29. Dezember 1951 hervor: „Io mi propongo certamente di riscrivere tutto il testo ancora una volta ex-novo, usufruendo soltanto in piccola parte della mia redazione del 1942, la quale rimane tuttavia in certo senso come il nucleo, intorno al quale si sviluppa la nuova trattazione."

***) CONFORTO, FABIO: Funzioni Abeliane modulari. Lezioni raccolte dal Dott. MARIO ROSATI. 454 S. Rom: DOCET, Edizioni Universitarie 1951.

darauf gerichtet, daß der Charakter des Buches mit seinen vielfach anerkannten Vorzügen voll erhalten bleibe: das heißt, es sollte eine anschauliche und verständliche, durch moderne Abstraktionen*) nicht allzu beschwerte Darstellung der klassischen Theorien von RIEMANN, WEIERSTRASS, KLEIN, HURWITZ, POINCARÉ, APPELL, FROBENIUS, WIRTINGER, HUMBERT darbieten, die in allgemeiner Form erstmals von CONFORTO zusammengefaßt worden sind. Wenn damit auch Verzicht auf die größtmögliche Allgemeingültigkeit der Sätze geleistet wird, so bleiben dafür die Entwicklungen näher der geometrischen Anschaulichkeit, auf welche sich einer der hauptsächlichsten Vorzüge von CONFORTOs Vorlesungen gründet.

So ist das Buch aber auch besser für das Studium geeignet, da kein ausgedehntes Spezialwissen vorausgesetzt werden muß. Um es lesen und verstehen zu können, genügen als Vorkenntnisse die Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Variablen, die projektive Geometrie und die Matrizenrechnung. Die wichtigsten Tatsachen über meromorphe Funktionen von mehreren Variablen sowie der grundlegende Satz von COUSIN werden im Anhang des Buches bewiesen. Außerdem ist nur an einigen Stellen im zweiten Kapitel, wo es unerläßlich war, um den geometrischen Inhalt einiger Sätze, wie z. B. des Theorems von APPELL-HUMBERT und der daraus abgeleiteten Folgerungen, präzise definieren und exakt beweisen zu können, von den Begriffen und Sätzen der Idealtheorie und deren Anwendungen in der algebraischen Geometrie Gebrauch gemacht worden**).

Ganz neu hinzugefügt wurden außer dem bereits erwähnten Anhang über meromorphe Funktionen mehrerer komplexer Variablen im ersten Kapitel die Abschnitte Nr. 37 und 38 über allgemeine Thetafunktionen mit Charakteristiken und Thetafunktionen höherer Ordnung, im zweiten Kapitel der Beweis für die algebraische Natur der ABELschen Mannigfaltigkeiten und vor allem die Konstruktion eines singularitätenfreien Modells der PICARDschen Mannigfaltigkeit, die ich einer freundlichen brieflichen Mitteilung von Prof. C. L. SIEGEL verdanke.

Auch alle übrigen Beweise des zweiten Kapitels mußten neu aufgebaut werden, damit sie den Anforderungen einer exakten Beweisführung genügen. Da in vielen Fällen noch keine Ansätze und Vorarbeiten dafür vorlagen, mußten hier mehrmals ganz neue Wege eingeschlagen werden, die auch zu neuen Erkenntnissen führten, wie z. B.

*) So sind z. B. alle Funktionenkörper grundsätzlich über dem Körper der komplexen Zahlen aufgebaut.

**) Tatsächlich scheint außer der Idealtheorie keine andere Theorie die hier notwendigen Begriffe und Beweismethoden in der erforderlichen Differenziertheit und Schärfe zu enthalten.

zur Tatsache, daß der Integritätsbereich aller zu einer RIEMANNschen Matrix gehörigen intermediären Funktionen ein ZPE-Ring ist, eine Tatsache, die neues Licht nicht nur auf die funktionentheoretische, sondern auch auf die geometrische Seite der Theorie wirft und in ihren weiteren Auswirkungen noch gar nicht ausgewertet werden konnte.

Die von CONFORTO erstmals im Jahre 1942 ausgearbeitete Einführung in die Theorie der ABELschen Funktionen hat gegenüber älteren Darstellungen den Vorzug eines lückenlosen logischen Aufbaues: Ausgehend von der Definition der ABELschen Funktionen als meromorpher Funktionen von p Variablen mit $2p$ unabhängigen Perioden werden zunächst — unter Voraussetzung der Existenz einer ABELschen Funktion — die notwendigen Eigenschaften der von den Perioden gebildeten RIEMANNschen Matrix, das sind die sog. Periodenrelationen, ermittelt. Diese Eigenschaften erweisen sich sodann auch umgekehrt als hinreichend, da gezeigt wird, daß zu einer diese Bedingungen erfüllenden Periodenmatrix immer zugehörige ABELsche Funktionen konstruiert werden können, die im wesentlichen als Quotienten von Thetareihen darstellbar sind, so daß hier die Thetareihen nicht ein künstlich herangezogenes Hilfsmittel der Theorie sind, sondern aus den ursprünglichen Ansätzen als notwendig sich ergebendes Resultat folgen.

Die (im zweiten Kapitel behandelte) geometrische Bedeutung der ABELschen Funktionen ergibt sich aus der Tatsache, daß Parameterdarstellungen mittels ABELscher Funktionen zu p-dimensionalen algebraischen Mannigfaltigkeiten führen, deren Eigenschaften zufolge dieser Darstellung leicht untersucht werden können. Besonders wichtig sind die PICARDschen Mannigfaltigkeiten, deren Punkte umkehrbar eindeutig den Punkten des Periodenparallelotops, das ist ein verallgemeinerter Torus, entsprechen. Die rationalen und birationalen Transformationen einer PICARDschen Mannigfaltigkeit lassen sich von der funktionentheoretischen Seite her leicht diskutieren; die geometrische Interpretation ist außerordentlich interessant und liefert wichtige neue Erkenntnisse für die Theorie der irregulären algebraischen Mannigfaltigkeiten.

Dieser letzte Teil der Theorie steht noch ganz im Bereich der weiter dringenden Forschung; es kann wohl nicht erwartet werden, daß in der vorliegenden Einführung bereits abschließende Ergebnisse aufgezeigt werden*). Dagegen muß mit Bedauern eingestanden und der menschlichen Unzulänglichkeit sowie dem Mangel an Zeit und Raum zugute gehalten werden, daß manche Abschnitte der klassisch gereiften Theorie, die etwa in diesem Buch gesucht werden dürften, nicht mehr verarbeitet

*) Unter anderem liegt im Nachlaß CONFORTOs auch ein unvollendetes Manuskript „Le varietà superficialmente irregolari“ vor, das bisher nicht veröffentlicht ist und auch in unsere Bearbeitung nicht mit aufgenommen werden konnte.

worden sind; vor allem wird man die Behandlung der speziellen ABELschen Funktionen sowie des JACOBIschen Umkehrproblems vermissen. CONFORTO hatte allerdings noch viele weitere Pläne, mit denen diese Lücken gefüllt worden wären, aber wie weit diese in einer näheren oder ferneren Zukunft werden fortgesetzt werden können, das wird wesentlich davon abhängen, ob es dem vorliegenden Buche gelingt, das Interesse der gegenwärtigen Mathematikergeneration auf dieses Gebiet der algebraischen Geometrie hinzulenken.

Innsbruck, den 30. Dezember 1955

W. GRÖBNER

Inhaltsverzeichnis

Zweites Kapitel. **Die ABELschen Mannigfaltigkeiten**

Einleitung

Die Theorie der ABELschen Funktionen leitet sich historisch ab vom JACOBI*schen Umkehrproblem* (1829) für p linear unabhängige Integrale 1. Gattung

$$\int \varphi_1(x, y)\, dx\,, \quad \int \varphi_2(x, y)\, dx\,, \ldots, \quad \int \varphi_p(x, y)\, dx$$

auf einer algebraischen Kurve C des Geschlechtes p, das die folgende Aufgabe stellt:

Sind (a_i, b_i) die Koordinaten von p fest gegebenen Punkten, (x_i, y_i) diejenigen von p variablen Punkten auf C $(i = 1, 2, \ldots, p)$, ferner $u_1, u_2, \ldots, u_p$ beliebig gegebene (komplexe) Zahlenwerte, so sollen aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\int_{(a_1,b_1)}^{(x_1,y_1)} \varphi_1(x, y)\, dx + \int_{(a_2,b_2)}^{(x_2,y_2)} \varphi_1(x, y)\, dx + \cdots + \int_{(a_p,b_p)}^{(x_p,y_p)} \varphi_1(x, y)\, dx = u_1\,,\\
&\int_{(a_1,b_1)}^{(x_1,y_1)} \varphi_2(x, y)\, dx + \int_{(a_2,b_2)}^{(x_2,y_2)} \varphi_2(x, y)\, dx + \cdots + \int_{(a_p,b_p)}^{(x_p,y_p)} \varphi_2(x, y)\, dx = u_2\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\int_{(a_1,b_1)}^{(x_1,y_1)} \varphi_p(x, y)\, dx + \int_{(a_2,b_2)}^{(x_2,y_2)} \varphi_p(x, y)\, dx + \cdots + \int_{(a_p,b_p)}^{(x_p,y_p)} \varphi_p(x, y)\, dx = u_p
\end{aligned} \tag{J}$$

die Koordinaten $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_p, y_p)$ berechnet werden.

Die Integrale sind eindeutig, wenn man sie auf die kanonisch zerschnittene RIEMANNsche Fläche der Kurve C bezieht*). Die Zuordnung der oberen zu den unteren Grenzen in den Integralen von (J) darf beliebig permutiert werden. Die im allgemeinen eindeutige Lösbarkeit des JACOBIschen Umkehrproblems wurde erst durch die Arbeiten von RIEMANN (1857) und WEIERSTRASS (1876) sichergestellt, d. h. *bei festgehaltenen Anfangspunkten (a_i, b_i) und gegebenen Werten $u_1, u_2, \ldots, u_p$ wird durch die Gleichungen* (J) *eine Punktgruppe $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_p, y_p)$ (oder ausnahmsweise**) eine lineare Schar g_p) auf C eindeutig festgelegt.*

*) Vgl. W. WIRTINGER: Algebraische Funktionen und ihre Integrale. Enzyklop. d. math. Wiss. II B2, **6**.

**) Nach dem ABEL*schen Theorem* gilt nämlich für Integrale 1. Gattung:

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_1^*,y_1^*)} \varphi_i(x, y)\, dx + \int_{(x_2,y_2)}^{(x_2^*,y_2^*)} \varphi_i(x, y)\, dx + \cdots + \int_{(x_p,y_p)}^{(x_p^*,y_p^*)} \varphi_i(x, y)\, dx \equiv 0 \text{ (mod. Perioden)}\,,$$

wenn die Punktgruppen $(x_1, y_1), \ldots, (x_p, y_p)$ und $(x_1^*, y_1^*), \ldots, (x_p^*, y_p^*)$ linear äquivalent, d. h. in einer und derselben linearen Schar g_p enthalten sind. Vergleiche W. WIRTINGER: a. a. O. **42**.

Wenn man die Integrale auf die unzerschnittene RIEMANNsche Fläche bezieht, so können die rechten Seiten der Gleichungen (J) noch um „simultane Perioden" vermehrt werden; bedeutet nämlich ω_i eine Periode des Integrals $\int \varphi_i(x, y)\, dx$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ längs eines geschlossenen Periodenweges (Zykels) auf der RIEMANNschen Fläche von C, so vermehren sich die rechten Seiten der Gleichungen (J) um ω_i, wenn man zu den Integralwegen auf der linken Seite diesen geschlossenen Periodenweg hinzufügt, was ohne Änderung der Endpunkte geschehen kann. Als Lösung des JACOBIschen Umkehrproblems erhält man also für die Werte $u_i + \omega_i$ wieder dieselbe Gruppe von p Punkten wie für die Werte u_i.

Daraus schließt man, daß die Punktgruppe $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_p, y_p)$ oder genauer jede symmetrische rationale Funktion der Koordinaten dieser Punkte eine eindeutige meromorphe Funktion der komplexen Variablen $u_1, u_2, \ldots, u_p$ ist, welche das *simultane Periodensystem* $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ besitzt (d. h. der Funktionswert ändert sich nicht, wenn man u_i durch $u_i + \omega_i$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ ersetzt). Da es auf der RIEMANNschen Fläche von C im ganzen $2p$ unabhängige Zykel gibt*), besitzt unsere Funktion auch $2p$ simultane Periodensysteme.

Diese Lösungen des JACOBIschen Umkehrproblems heißen ABEL*sche Funktionen.* Für die effektive Lösung des Umkehrproblems, die für $p = 1$ bereits in den Arbeiten von ABEL und JACOBI enthalten ist, dienen die von JACOBI eingeführten „Thetareihen"; mit ihrer Hilfe haben GÖPEL und ROSENHAIN das Problem im Falle $p = 2$, RIEMANN und WEIERSTRASS für allgemeines p gelöst.

Nach RIEMANN und WEIERSTRASS wurde die Theorie der ABELschen Funktionen *auch über das Umkehrproblem hinaus* weiter entwickelt, nachdem man erkannt hatte, daß es eindeutige meromorphe Funktionen von p Variablen mit $2p$ (unabhängigen) simultanen Periodensystemen gibt, die aus keinem Umkehrproblem entspringen, also allgemeinerer Natur sind als die ersten Funktionen, die man nach POINCARÉ „spezielle ABELsche Funktionen" nennt. Diese allgemeinen ABELschen Funktionen wurden in Deutschland besonders von KLEIN, KRAZER, WIRTINGER, in Frankreich von PICARD, POINCARÉ, PAINLEVÉ, HUMBERT, in Italien am Beginn unseres Jahrhunderts von den Vertretern der algebraischen Geometrie, besonders von SCORZA untersucht. In nahem Zusammenhang damit stehen die Forschungen von LEFSCHETZ in Amerika.

Der Grund, weshalb die ABELschen Funktionen eng mit der algebraischen Geometrie verbunden erscheinen, liegt im fundamentalen Satz, daß *zwischen $p + 1$* ABEL*schen Funktionen von p Variablen immer eine algebraische Relation besteht,* deren Gleichung eine algebraische Mannigfaltigkeit vorstellt, die eine Parameterdarstellung durch ABELsche

*) Vgl. W. WIRTINGER: a. a. O. **11**.